Chapitre I: Intégrales aux sens de Riemann

Mohamed CH-Chaoui
Department de Mathématiques, FP Khouribga.
Email: mohamed.chchaoui@gmail.com

18 avril 2020

Table des matières

1 Introduction

La notion d'intégrale a été bien formalisée au 19^e siecle grace au Riemann qui s'est intéréssé à une fonction f donnée sur un segment $[a, b]$ et essaie d'approcher l'aire $\mathcal{A}$ sous le graphe de f par les aires $\mathcal{S}^-$ et $\mathcal{S}^+$ de deux familles de réctangle qui approche par defaut et par excès l'aire $\mathcal{A}$, comme le montre le graphe 1.

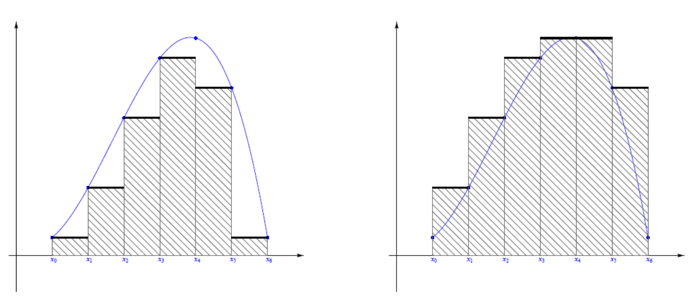

FIGURE 1 – **à gauche somme inférieurs $\mathcal{S}^-$, et à droite somme inférieurs $\mathcal{S}^+$**

Une fonction est intégrable au sens de Riemann si la différence des aies $\mathcal{S}^-$ et $\mathcal{S}^+$ tend vers 0 quand le pas de subdivision (la largeur des réctangles considérés) tend vers 0.
Par la suite, on s'intérresera à une classe de fonctions plus simples que celles étudiée dans l'intégrale de Riemann : **Les fonctions continues par morceaux**.
Plus particulier, pour un segment $[a, b]$ et une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ positive, on essayera de répondre aux deux questions :

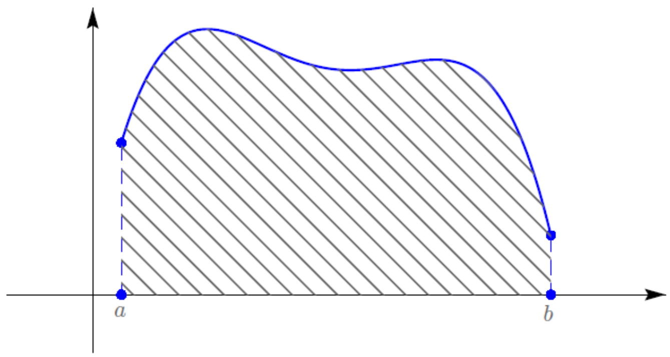

FIGURE 2 – **Aire sous une courbe**

1. Quelle conditions doit-on-imposer à f pour que l'aire sous la courbe doit ètre bien définie ? (voire Figure 2)

2. Comment calculer cette aire ?

Commençons par les fonctions en escaliers qui constituent un cas particulier des fonctions continues par morceaux :

2 Fonctions en escaliers

2.1 Subdivision d'un ségment

Définition 2.1. ***Subdivision d'un ségment*** *(voire Figure 3)*
On appelle subdivision du ségment $[a, b]$ toute famille $\tau = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels tels que

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Le pas de la subdivision τ est donnée par $\max_{i \in [0,n-1]} \mid x_{i+1} - x_i \mid$. Une subdivision de $[a, b]$ est régulière si tous les $x_{i+1} - x_i$ sont égaux.

Définition 2.2. ***Subdivision plus fine qu'une autre***
Considérons τ et τ' deux subdivisions d'un ségment $[a, b]$. On dit que τ' est plus fine que τ si et seulement si tout élément de la famille τ est élément de la famille τ'. (ou simplement $\tau \subset \tau'$)

Proprété 1. *Soient τ et τ' deux subdivisions d'un ségment $[a, b]$. Il existe une subdivision de $[a, b]$ plus fine que τ et τ'*

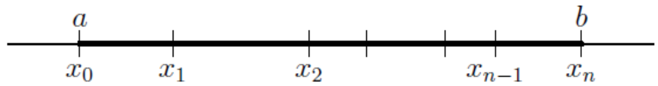

FIGURE 3 – **Subdivision d'un segment**

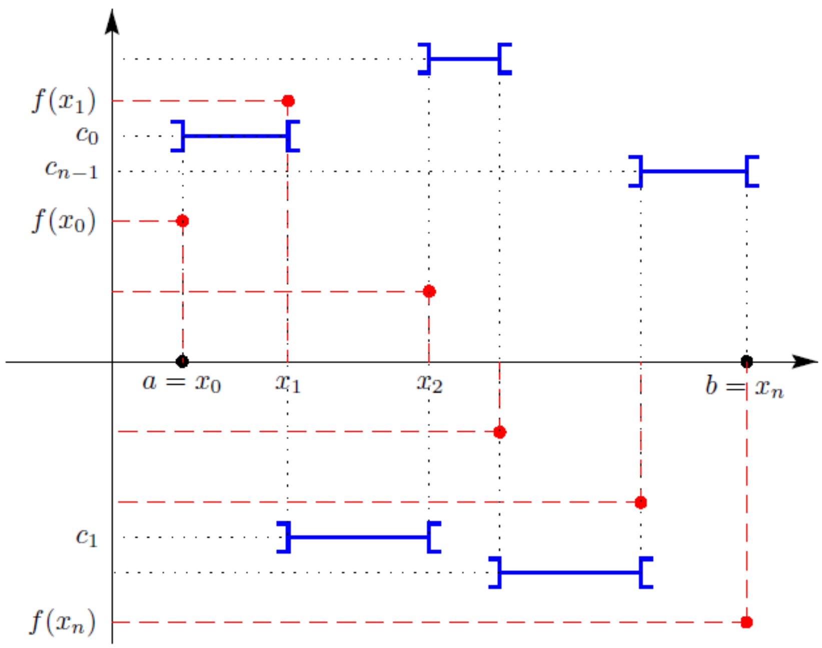

FIGURE 4 – **Fonctions en escalier**

Preuve. Il suffit de considérer la famille $\tau" = (x_k)_{1 \leq k \leq N}$ dont les éléments sont ceux de τ et ceux de τ' ordonnés dans l'ordre croissant et où N est le cardinal de la famille ainsi construite. $\tau"$ est plus fine que τ et τ'.

2.2 Fonctions en escaliers

Définition 2.3. *Une fonction $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur le segment $[a, b]$ (figure* **??***) s'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < ... < x_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que ϕ est constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.*

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \ \ \exists c_k \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, \quad \phi(x) = c_k$$

— La subdivision τ est dite subordonnée à la fonction ϕ.
— On notera $\mathcal{E} \in ([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Remarque 2.1. - *Si τ est une subdivision subordonnée à ϕ alors toute subdivision plus fine est encore subordonnée à ϕ.*
- Une fonction constante est une fonction en escalier

Proprété 2. *Toute fonction $\phi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est borné sur $[a,b]$.*

Preuve. Soient ϕ une fonction en escalier et $\tau = x_0 < ... < x_n = b$ une subdivision qui lui est subordonnée. On a donc :

$$\forall k \in [0, n-1],\ \exists c_k \in \mathbb{R},\ \forall x \in]x_k, x_{k+1}[,\ \phi(x) = c_k.$$

En posant $m = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \mid c_k \mid$ puis $M = \max(m, \mid \phi(x_0) \mid, ..., \mid \phi(x_n) \mid)$.
On a

$$\forall x \in [a,b], \quad \mid \phi(x) \mid \le M.$$

2.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2.4. ***Intégrale d'une fonction en escalier***
Supposons que $a < b$. Soit une fonction en escalier $\phi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\tau : a = x_0 < ... < x_n = b$ une subdivision subordonnée à ϕ. Soient $c_0, ..., c_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall k \in [0, n-1],\ \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\ \phi(x) = c_k :$$

On définit l'intégrale de la fonction en escalier ϕ entre a et b comme étant le nombre réel

$$\int_{[a,b]} \phi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k)$$

3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escaliers

Proprété 3. ***La liéarité de l'intégrale*** *Soient $\phi_1,\ \phi_2 \in \mathcal{E}([a.b],\mathbb{R})$ deux fonctions en escalier sur le segment $[a,b]$. Pour tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_{[a,b]} \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 = \alpha \int_{[a,b]} \phi_1 + \beta \int_{[a,b]} \phi_2$$

Preuve. Soient τ_1 une subdivision subordonnée à ϕ_1, et τ_2 une subdivision subordonnée à ϕ_2 et soit τ une subdivision plus fine que τ_1 et τ_2. Elle est donc subordonnée àla fois à ϕ_1 et à ϕ_2.
Supposons que $\tau a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ et que

$$\forall i \in [0, n-1],\ \ \phi_1|_{]x_i, x_{i+1}[} = c_i \quad et \quad \phi_2|_{]x_i, x_{i+1}[} = d_i$$

On a alors

$$\int_{[a,b]} \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha c_i + \beta d_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} d_i (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \alpha \int_{[a,b]} \phi_1 + \beta \int_{[a,b]} \phi_2$$

■

Propreté 4. ***L'intégrale d'une fonction en escalier positive est positive***
Soit $\phi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$. Si ϕ est positive sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} \phi \geq 0$.

Preuve. Soit $\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ une subdivision subordonnée à

$$\phi : \forall i \in [0, n-1],\ \phi_1|_{]x_i,x_{i+1}[} = c_i \in \mathbb{R}.$$

Comme ϕ est positive, pour tout $i \in [0, n-1]$, on a $c_i \geq 0$. Par conséquent,

$$\int_{[a,b]} \phi = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i) \geq 0.$$

■

Corollaire 1. *Soit ϕ_1, et ϕ_2 deux fonctions en escaliers, On a*

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Rightarrow \int_{[a,b]} \phi_1 \leq \int_{[a,b]} \phi_2$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction en escalier $\phi = \phi_2 - \phi_1$ et d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

Propreté 5. ***Relation de Chasles***
Soit ϕ une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. Alors

$$\int_{[a,b]} \phi = \int_{[a,c]} \phi + \int_{[c,b]} \phi$$

Preuve. Exercices.

4 Fonctions continues par morceaux

4.1 Définition et propriétés

Définition 4.1. ***Fonction continue par morceaux sur un segment***
*Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ (Figure **??**) lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que*

1. *Pour tout $k \in [0, n-1]$, la restriction de ϕ à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.*
2. *Pour tout $k \in [0, n-1]$, la restriction de ϕ à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $]x_k, x_{k+1}[$, autrement dit, ϕ restreinte à $]x_k, x_{k+1}[$ admet une limite finie strictement à droite en x_k et strictement à gauche en x_{k+1}.*

Une telle subdivision est dite adaptée ou subordonnée à ϕ

Remarque 4.1. — *Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

— *Comme pour les fonctions en escaliers, si τ est une subdivision de $[a,b]$ subordonnée à ϕ continue par morceaux sur $[a,b]$ et si τ'est une autre subdivision de ϕ de $[a,b]$ plus fine que τ alors τ' est aussi subordonnée à ϕ.*

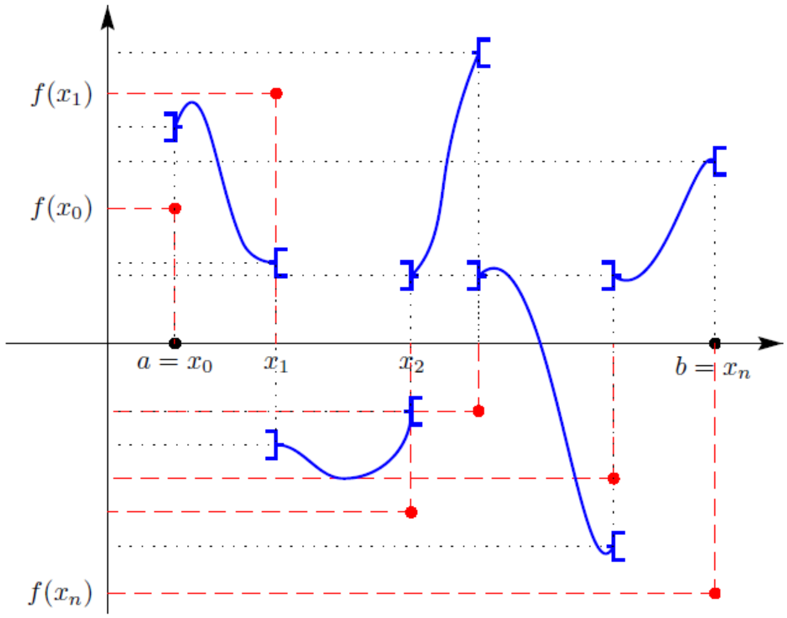

FIGURE 5 – **Fonctions continues par morceaux**

Proprété 6. *Si ϕ une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ alors ϕ est bornée sur $[a, b]$*

Preuve. Soit ϕ une fonction continue par morceaux sur [a,b] et soit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ une subdivision subordonnée à ϕ.
Pour tout $i \in [0, n-1]$, la fonction $\phi_{]x_i,x_{i+1}[}$ est continue et se prolonge en une fonction $\overline{\phi}_i$ continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$.
Sachant que (**Analyse 1**) toute fonction continur sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes.

$\overline{\phi}_i$ est bornée sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$. Posons $M = \max\limits_{i\in[0,n-1]}\{M_i, \mid \phi(x_i) \mid\} \bigcup \{\mid \phi(b) \mid\}$.
Alors
$$\forall x \in [a, b], \ \mid \phi(x) \mid \leq M.$$

■

4.2 Approximation des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier

Théorème 1. ***Approximation des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier***
Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et $\epsilon > 0$. Alors, il existe une fonction en escalier ϕ telle que
$$\| f - \phi \|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \mid f(x) - \phi(x) \mid \leq \epsilon$$

Notation *: La quantité $\sup_{x\in[a,b]} \mid L(x) \mid$ se note $\| L \|_\infty$ et se lit : norme infini de f sur l'inetrvalle $[a, b]$.*

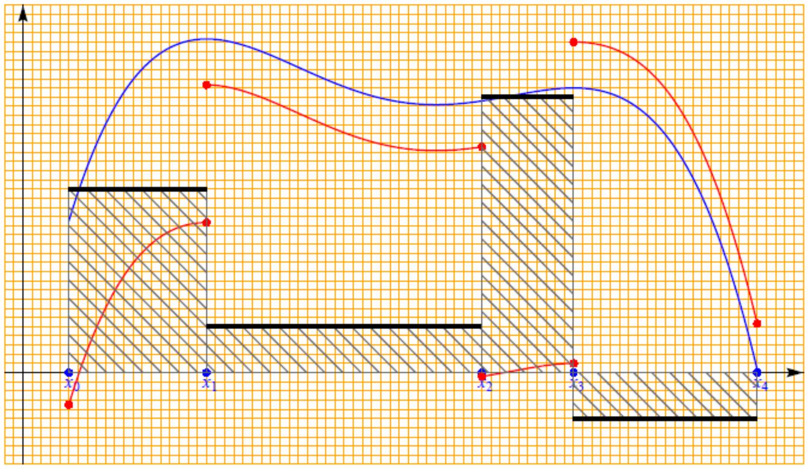

FIGURE 6 – **Toute fonction continues par morceaux est somme d'une fonction en escalier et une fonction continue**

Preuve. Puisque la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, elle est uniformément continue sur ce segment(théorème de Heine), il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, $\mid x - y \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid \leq \epsilon$.
Considérons alors un entier n suffisemment grand pour que $(b-a)/n \leq \eta$ et définissant la subdivision de pas constant $h = (b - a)/n \leq \eta$, $x_i = a + ih$, pour $i \in [0, n - 1]$.
Définissant ensuite la fonction en escalier ϕ en posant $\forall i \in [0, n - 1]$, $\quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}[$, $\phi(x) = f(x_i)$ et $\phi(b) = f(b)$. Soit $x \in [a, b]$, il existe $i \in [0, n - 1]$ tel que $x_i \leq x < x_{i+1}$ et comme $\mid x - x_i \mid \leq \eta$, $\mid f(x) - \phi(x) \mid = \mid f(x) - f(x_i) \mid \leq \epsilon$.
Si $x = b$, on a également $\mid f(b) - \phi(b) \mid = 0 \leq \epsilon$. En passant à la borne supérieure, on a bien $\parallel f - \phi \parallel_\infty \leq \epsilon$. ■

Lemme 4.1. *Une fonction continue par morceaux est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier (figure* **??***) Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, il existe une fonction g continue sur $[a, b]$ et une fonction ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que*

$$f = g + \psi.$$

Preuve. Considérons une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ subordonnée à la fonction en escalier f. Comme f est continue par morceaux, sa restriction à $]x_0, x_l[$ possède une limite finie à droite en x_0 et une limite finie à gauche en x_1, $f(x)_{x \to x_0^+} \to l$ et $f(x)_{x \to x_l^-} \to L$.
Posons $\forall x \in]x_0, x_1[$, $g(x) = f(x)$, $g(x_0) = L$ et $\psi(x_0) = f(x_0) - l$, $\forall x \in]x_0, x_1[$, $\psi(x) = 0$ et $\psi(x_1) = f(x_1) - L$. On a bien g continue sur $[x_0, x_1]$ et $\forall x \in [x_0, x_1]$, $f(x) = g(x) + \psi(x)$. On recommence ce procédé sur $[x_1, x_2]$... pour définir les fonctions g et ψ sur $[a, b]$. ■

Corollaire 2. ***Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier***
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $\epsilon > 0$, Il existe une fonction ψ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\parallel f - \phi \parallel_\infty \leq \epsilon$

Preuve. D'après le lemme précédent, il existe une fonction g continue sur $[a, b]$ et une fonction ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que $f = g + \psi$. D'après le théorème précédent, il existe une fonction χ sur

$[a,b]$ telle que $\| g-\chi \|_\infty \leq \epsilon$. Posons alors $\phi = \psi + \chi$. C'est une fonction en escalier et on a bien $\| f-\phi \|_\infty = \| g-\chi \|_\infty \leq \epsilon$ ■

Corollaire 3. *Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier*
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions en escalier ϕ, $\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \textit{et} \quad \psi - \phi \leq \epsilon$$

Preuve. D'après le corollaire 2, il existe une fonction en escalier χ sur $[a,b]$ vérifiant $\forall\, x \in [a,b]$, $-\frac{\epsilon}{2} \leq f(x) - \chi(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Définissant les fonctions en escalier $\phi = \chi - \frac{\epsilon}{2}$ et $\psi = \chi + \frac{\epsilon}{2}$. Elles vérifient bien $\phi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \phi = \epsilon$ ■

4.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Propreté 7. *Soit une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. On considère les ensembles*

$$\mathcal{I}^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi / \varphi \textit{ est en escalier sur } [a,b] \textit{ et } \varphi \leq f \right\}$$

$$\mathcal{I}^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi / \varphi \textit{ est en escalier sur } [a,b] \textit{ et } \varphi \geq f \right\}$$

On a les propriétés suivantes,
- *$\mathcal{I}^-(f)$ admet une borne supérieure.*
- *$\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure.*
- *$\sup \mathcal{I}^-(f) = \inf \mathcal{I}^+(f)$.*

Preuve. On définit les ensembles $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ par

$$\mathcal{E}^- = \{\varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi \leq f\}, \quad \mathcal{E}^+ = \{\varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi \geq f\}$$

- Comme la fonction f est continue par morceaux, elle est bornée et donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ vérifiant $m \leq f \leq M$. On en déduit que l'ensemble$\mathcal{E}^-$ est non vide car $\varphi = m$ est élément de $\mathcal{E}^-$ et par suite l'ensemble $\mathcal{I}^-$ est non vide. De même, $I^+ \neq \emptyset$.
- De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^-$, on a $\varphi \leq f \leq M$ donc

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} (M) = M(b-a)$$

  Ainsi l'ensemble $\mathcal{I}^-$ est majorée par $M(b-a)$. Finalement $\mathcal{I}^-$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc $\alpha = \sup \mathcal{I}^-$ existe.
- De même $\beta = \inf \mathcal{I}^+$ existe car $\mathcal{I}^+$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par $m(b-a)$.

Il reste à montrer $\alpha = \beta$
- Pour tout $\varphi \in \mathcal{I}^-$, $\psi \in \mathcal{I}^+$ on a $\varphi \leq f \leq \psi$ donc $\varphi \leq \psi$ puis $\int_{[a,b]} (\varphi) \leq \int_{[a,b]} (\psi)$. Par suite $\int_{[a,b]} (\varphi)$ est un minorant de $\mathcal{I}^+$ et donc $\int_{[a,b]} (\varphi) \leq \beta$. Ainsi β est un majorant de $\mathcal{I}^-$t donc $\alpha \leq \beta$

— D'autre part, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.
Puisque $\varphi \in \mathcal{I}^-$ et $\psi \in \mathcal{I}^+$ on a $\int_{[a,b]}(\varphi) \leq \alpha$ et $\beta \leq \int_{[a,b]}(\psi)$.
De plus $\psi \leq \varphi + \varepsilon$ donc

$$\int_{[a,b]}(\psi) \leq \int_{[a,b]}(\varphi) + \int_{[a,b]}(\varepsilon)$$

On en déduit $\beta \leq \alpha + \varepsilon(b-a)$.
Cette relation valant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\beta \leq \alpha$. Finalement $\alpha = \beta$. □

Définition 4.2. *Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur [a,b] et on la note :*

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx = \sup \mathcal{I}^-(f) = \inf \mathcal{I}^+(f)$$

4.4 Sommes de Riemann

Définition 4.3. *Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ et soit $\pi = \{a = x_0 < x_1 < ..... < x_{n-1} < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ et $\alpha_k \in]x_{k-1}, x_k[$ pour $k = 1, ..., n$ un réel choisit au hasard .*
On appelle somme de Riemann associée à f, π et α_k le nombre

$$S(f, \pi, \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(\alpha_k)$$

Théorème 2. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les deux sommes de Riemann suivantes*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right), \qquad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors l'intégrale de f est le nombre

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

4.5 Propriétés de l'intégrale

Propreté 8. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ alors on a :*

1. $\int_a^b(\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. *Si $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*
3. *Relation de chasles : $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall c \in [a,b]$*
4. ***Formule de la moyenne*** *Soient f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Si de plus f est bornée alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

avec $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$,

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des fonctions en escalier $\varphi_1, \varphi_2, \phi_1, \phi_2$ définies sur $[a,b]$ telles que

$$\varphi_1 \leq f \leq \phi_1,\ \phi_1 - \varphi_1 \leq \varepsilon_1 \quad et \quad \varphi_2 \leq g \leq \phi_2,\ \phi_2 - \varphi_2 \leq \varepsilon_1$$

On a donc

$$\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \leq \alpha f + \beta g \leq \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \quad et \quad \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 - (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) \leq \varepsilon$$

Il vient alors

$$\int_{[a,b]} \alpha(\varphi_1 - \phi_1) + \beta(\varphi_2 - \phi_2) \leq I - (\alpha I_1 + \beta I_2) \leq \int_{[a,b]} \alpha(\phi_1 - \varphi_1) + \beta(\phi_2 - \varphi_2)$$

avec $I = \displaystyle\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g)$, $I_1 = \displaystyle\int_{[a,b]} f$ et $I_2 = \displaystyle\int_{[a,b]} g$. Donc

$$\int_{[a,b]} -\varepsilon(\alpha + \beta) \leq I - (\alpha I_1 + \beta I_2) \leq \int_{[a,b]} \varepsilon(\alpha + \beta)$$

alors

$$-\varepsilon_1(\alpha + \beta)(b - a) \leq I - (\alpha I_1 + \beta I_2) \leq \varepsilon_1(\alpha + \beta)(b - a)$$

En choisissant $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)(b - a)}$, on trouve

$$|I - (\alpha I_1 + \beta I_2)| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

ce qui prouve la propriété (1). □

Théorème 3. *Soit une fonction* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ***continue et positive*** *sur* $[a,b]$*. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Longrightarrow f = 0$$

En particulier :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx = 0\right) \Longrightarrow (f = 0), \qquad \left(\int_a^b f^2(x)dx = 0\right) \Longrightarrow (f = 0).$$

Preuve. Par l'absurde, supposons que la fonction f n'est pas nulle. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Pour simplifier la rédaction, supposons que $c \in]a,b[$ et $f(c) > 0$ (les autres cas se traitent de la même façon). Posons $\varepsilon = f(c)/2$. Puisque la fonction f est continue au point c, on peut trouver un voisinage $]c - \eta, c + \eta[$ de c avec $\eta > 0$ inclus dans $[a,b]$ tel que $\forall x \in]c - \eta, c + \eta[$, $-\varepsilon \leq f(x) - f(c) \leq \varepsilon$ c'est à dire $f(x) \geq \varepsilon$. On a donc par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^b f(x)dx \\ &\leq \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)dx \ (car\ f \geq 0) \\ &> \int_{c-\eta}^{c+\eta} \varepsilon dx = 2\eta\varepsilon > 0\end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec $\displaystyle\int f = 0$. f est donc nulle sur $[a,b]$. □

Propríété 9. *Inégalités remarquables*

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$. On a les inégalités suivantes

— ***Inégalité de Cauchy-Schwartz***

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} . \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

— ***Inégalité de Minkowski*** *En notant* $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$,

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$